

Gymnasium Neustadt a.d. Waldnaab

Computeralgebra-Wettbewerb 2008

# **Kniffel**

## **Eine computergestützte Analyse des Würfelklassikers**

Ralf Käck

Ludwig-Graf-Straße 5

92670 Windischeschenbach

Dominik Kellner

Fiedlbühl 15

92648 Vohenstrauß

# Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	3
1.1	Abstract.....	3
1.2	Über diese Arbeit.....	4
2	Die Spielregeln.....	5
2.1	Klassisch.....	5
2.2	Vereinfacht.....	6
3	Das perfekte Spiel.....	7
3.1	Grundgedanken.....	7
3.2	Die Resterwartung.....	7
3.3	Auswählen und Zurücklegen.....	9
4	Das vereinfachte Spiel.....	11
4.1	Ein freies Feld.....	12
4.2	Zwei freie Felder.....	15
4.3	Drei freie Felder.....	17
5	Implementierung in Python.....	19
5.1	Einleitung.....	19
5.2	Überblick.....	19
5.3	Datenstrukturen.....	20
5.4	Zusammenspiel von Worker und Spielmodus.....	21
5.5	Die Spielmodi.....	22
6	Ausblick.....	23
6.1	Varianten.....	23
6.2	Graphische Oberflächen und weitere Anwendungsmöglichkeiten.....	23

# 1 Einleitung

## 1.1 Abstract

„Kniffel lässt die Köpfe rauchen. Durch geschicktes Kombinieren der geworfenen Augen können Sie Ihre Gewinnchancen erhöhen und eine möglichst hohe Punktzahl erreichen. Der Spieler mit der höchsten Summe gewinnt.“<sup>1</sup>

Dies ist der letzte Absatz der offiziellen Spielanleitung für Kniffel von Schmidt Spiele.

Doch was ist „geschicktes Kombinieren“?

„Nehmen wir einmal an, wir haben gerade das Spiel begonnen und  $\square\square\square\square\square$  gewürfelt. Wie würden Sie handeln?“ Bei einer kleinen Befragung im Bekanntenkreis kristallisierten sich einige Hauptspielweisen heraus, aber nur einer der 15 Personen ließ mit  $\square\square\square$  den besten Teilwurf liegen. Die Spielweise der anderen Spieler ist nicht wirklich schlecht, wenngleich man die jeweiligen Erwartungswerte minimal geringer sind. ( $\square$  bezeichnet den leeren Teilwurf, d.h. es wird kein Würfel behalten)

$\square\square\square$  = 242,3506 (1 von 15)

$\square$  = 241,8493 (3 von 15)

$\square\square\square\square$  = 241,2373 (6 von 15)

$\square\square$  = 241,1484 (5 von 15)

Sehr interessant ist auch, dass der zweitbeste Teilwurf nicht gewählt wurde:

$\square\square$  = 242,2844

Bei der Eröffnung dieses Ergebnisses trat unter den Befragten eine Mischung aus Verwunderung und Unglauben ein, die allerdings noch übertroffen werden konnte:

„Nehmen wir weiter an, dass Sie mit  $\square\square\square$  optimal ausgewählt haben und nun aber nochmal den gleichen Wurf  $\square\square\square\square\square$  bekommen, wie würden Sie nun handeln?“

8 Personen wollten nun die  $\square\square\square$  behalten, da dieser sich als optimal erwiesen hat. Die anderen blieben bei ihrer Meinung aus dem ersten Durchgang. Tatsächlich hat sich die Spielsituation durch das eine Mal Würfeln so stark verändert, dass es nun das Beste wäre  $\square\square$  zu behalten.

---

<sup>1</sup> Aus [1]

□□ = 238,0018 (2 von 15)

□□□□ = 237,8033 (8 von 15)

□ = 237,3958 (2 von 15)

□□□□□ = 237,0023 (3 von 15)

Im Folgenden wird das Würfelspiel Kniffel mit Hilfe des Computers untersucht und der Erwartungswert bei optimaler Spielweise herausgefunden. Auch ergibt sich dabei, dass diese im ersten Moment nicht nachvollziehbare Entscheidung den meisten Erfolg bringt.

## 1.2 Über diese Arbeit

Diese Arbeit entstand in Zusammenarbeit von Ralf Käck und Dominik Kellner und hat ihre Ursprünge in der im Januar 2008 abgegebenen Facharbeit von Käck. Sie unterscheidet sich aber von dieser in einigen Punkten. So wurde die mathematische Vorgehensweise zwar beibehalten, der Quellcode in Python aber komplett neu geschrieben. Neben der verständlicheren Struktur wurde eine Verbesserung der Performance um circa Faktor 100 erreicht. Der bedeutenste Fortschritt betrifft jedoch die Flexibilität. Mit dem neuen Code können mit relativ geringem Aufwand weitere Spielmodi und Regelvarianten berechnet werden. Auch ist ein Spiel mit gezinkten Würfeln berechenbar.

Diese Arbeit liegt in den Bereichen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie der Computeralgebra. Computeralgebra deshalb, weil in der unten beschriebenen mathematischen Vorgehensweise die Möglichkeit der wirklich exakten algebraischen Berechnung liegt. Aufgrund begrenzter Rechenleistung rechnet der Programmcode nur mit 10 Nachkommastellen, eine Rechnung mit exakten Brüchen wäre aber möglich, wenn auch zeitaufwändiger.

## 2 Die Spielregeln<sup>2</sup>

### 2.1 Klassisch

Das klassische Kniffel wird mit 5 Würfeln über 13 Runden gespielt. Dabei darf der Spieler pro Runde drei Mal würfeln und nach dem jeweiligen Wurf entscheiden, welche Würfel er behalten will und mit welchen er ein weiteres Mal wirft um ein besseres Ergebnis zu erhalten. Nach dem dritten Wurf muss er ihn in eines der freien Felder eintragen. Erfüllt dieser die Anforderungen des gewählten Feldes nicht, erhält der Spieler auch keine Punkte.

Wenn alle Felder voll sind, wird zusammengezählt. Sieger ist, wer die meisten Punkte erreicht hat.

Ein Beispiel für die Punkteberechnung, wie sie bei der gängigsten und am weitesten verbreiteten Variante des Kniffelspiels zum Einsatz kommt:

		Spieler 1	Spieler 2	Punkteberechnung
1	1er	1	0	Summe der Einsen
2	2er	8	6	Summe der Zweier
3	3er	9	9	Summe der Dreier
4	4er	16	12	Summe der Vierer
5	5er	20	15	Summe der Fünfer
6	6er	18	18	Summe der Sechser
	Bonus	35	0	35 falls Summe bis hier >= 63, 0 sonst
7	3er-Pasch	21	26	Summe alle Würfel falls mindestens 3 gleiche, 0 sonst
8	4er-Pasch	0	26	Summe aller Würfel falls mindestens 4 gleiche, 0 sonst
9	Full-House	25	0	25 falls Wurf der Form xxxyy, 0 sonst
10	Kleine Straße	30	30	30 falls 4 Würfel in Folge, 0 sonst
11	Große Straße	0	40	40 falls 5 Würfel in Folge, 0 sonst
12	Kniffel	0	50	50 falls alle Würfel gleich, 0 sonst
13	Chance	24	17	Summe aller Würfel
	Summe	207	249	Spieler 2 gewinnt

---

<sup>2</sup> Vergleiche [2]

## **2.2 Vereinfacht**

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird oft ein stark vereinfachtes Regelwerk benutzt, um die verschiedenen Sachverhalte und Berechnungen überschaubar erklären zu können. Hierzu definieren wir das vereinfachte Kniffelspiel wie folgt:

Der vereinfachte Spielblock besitzt nur drei Zeilen: „Nur Einser“, „Nur Zweier“ und „Chance“. Außerdem wird mit zwei dreiseitigen Würfeln gespielt und es darf nur zwei Mal pro Zug gewürfelt werden.

## 3 Das perfekte Spiel

### 3.1 Grundgedanken

Der besondere Reiz beim Kniffel entsteht durch die Kombination aus Glücksspiel und Können. Das Würfeln ist nicht beeinflussbar, wohl aber das spielerische Handeln. Der Mensch strickt im Laufe seiner Spielerkarriere eigene Strategien und testet diese im Spiel auf Erfolg – klassische Heuristik. Es muss aber auch eine absolute beste Spielweise geben.

Betrachtet man nur ein einzelnes Feld, beispielsweise die 1er, so ergeben verschiedene Würfe verschiedene Punkte. Geht man die  $6^5$  Würfe einzeln durch, liest jeweils ihre Punkte aus und teilt deren Summe durch in Anzahl der Würfe, so erhält man einen Erwartungswert für das Feld der 1er. Da es beim Kniffel auf die Reihenfolge der Würfel nicht ankommt und somit  $\square\square\square\square\square$  gleich  $\square\square\square\square\square$  ist, gibt es nur 252 verschiedene Würfe:

$$K_{mw}(n; k) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{6+5-1}{5} = \binom{10}{5} = 252$$

Da die 252 Würfe nicht alle gleich wahrscheinlich sind (man vergleiche die Eintrittswahrscheinlichkeiten von  $\square\square\square\square\square$  und  $\square\square\square\square\square$ ), ergibt sich der Erwartungswert der 1er aus den Punktzahlen der Würfe gewichtet mit ihren Eintrittswahrscheinlichkeiten.

### 3.2 Die Resterwartung

Wie im täglichen Leben ist es auch beim Kniffel fatal, die Folgen einer Handlung unberücksichtigt zu lassen. Zwar wird zunächst eine höhere Punktzahl erreicht, später rächt sich dieses Fehlverhalten aber. Als Beispiel sei ein Blatt gegeben, bei dem nur noch 1er und 2er als freie Felder zur Verfügung stehen. Der letzte Wurf offenbart  $\square\square\square\square\square$ . Kurzsichtig gedacht erhält man für einen Eintrag in das 1er-Feld 3 Punkte, für einen Eintrag bei den 2ern aber 4 Punkte. Somit wäre im ersten Moment letzteres die bessere Wahl.

Beim Kniffel muss aber über das ganze Spiel gedacht werden, denn eine Eintragung in ein Feld ändert die nachfolgende Spielsituation. Eine Veränderung, die berücksichtigt werden muss.

In diesem Fall würde man somit die 3 Punkte für den Eintrag in das Feld 1er + den

Erwartungswert für das restliche Spiel, „nur 2er frei“= 4,2130<sup>3</sup>. Insgesamt wären das 7,2130 Punkte. Bei einem Eintrag in das Feld 2er ergeben sich 4 Punkte für den direkten Eintrag + 2,1065<sup>4</sup> Punkte für „nur 1er frei“ insgesamt 6,1065 Punkte. Auf das gesamte Spiel gesehen ist somit der Eintrag in das 1er Feld besser, obwohl im ersten Moment weniger Punkte erhalten werden.

Um diese Erwartungswerte berechnen zu können waren zwei wichtige Tipps von Felix Holderied<sup>5</sup> nötig:

Zum einen ist für das restliche Spiel – am bisherigen kann eh nichts mehr geändert werden – allein wichtig, welche Felder noch frei sind, wobei unerheblich ist, welcher der möglichen Werte in einem bereits belegtem Feld steht. Daraus ergeben sich die Zustände 1 für belegt und 0 für frei für jedes Feld des Kniffelblocks. Einzige Ausnahme bildet der Bonus. Die aktuelle Summe der obersten sechs Felder, der für die Berechnung des Bonus wichtig ist, wird durch diese Vereinfachung unterschlagen. Zur Lösung des Problems wird diese Summe, im Folgenden Bonus genannt, zusätzlich gespeichert. Hierbei ist eine Unterscheidung nur von 0 bis 63 notwendig, da ab 63 die 35 Bonuspunkte bereits erhalten wurden und kein zweites Mal erhalten werden können. Insgesamt ergeben sich aus 13 Feldern mit den Möglichkeiten belegt und frei und den 64 Boni insgesamt  $2^{13} \cdot 64 = 524\,288$  Situationen. Jeder dieser Situationen kann eine Resterwartung zugeordnet werden, die über das gesamte Spiel immer wieder benötigt wird. Einige dieser Situationen sind jedoch spielerisch nicht erreichbar, als Beispiel sei hier ein leeres Blatt mit einem Bonus von 63 genannt.

Die zündende Idee zur Berechnung des Erwartungswerts für jede Situation kam wiederum von Felix Holderied<sup>6</sup>:

„Der Trick dabei ist, dass man von hinten nach vorn denken muss. Also wenn das Spiel zu Ende ist, ist der Erwartungswert = der erreichten Punkte.“

Anders formuliert ist der Erwartungswert für den Rest des Spieles gleich 0, wenn alle Felder bereits ausgefüllt sind. Durch diese Annahme können alle Erwartungswerte für Situationen mit einem freien Feld berechnet werden. Sollten diese berechnet sein, ist es mit diesem Wissen möglich die Erwartungswerte für zwei freie Felder zu berechnen. Diesen Vorgang setzt man so lange fort, bis die anfängliche Situation, das

---

3 Wert durch spätere Computerberechnung ermittelt

4 Wert durch spätere Computerberechnung ermittelt

5 Felix Holderied ist Diplominformatiker und Autor der Seite <http://holderied.de>

6 Aus [3]



leere Blatt, erreicht ist.

Die folgende Grafik veranschaulicht die Erwartungswerte des vereinfachten Spiels und deren Abhängigkeiten. Eine gleichartige Grafik des Standardspiels würde 14 Einheiten breit und 13 Einheiten hoch sein und insgesamt 8192 Werte enthalten – ohne Bonus, der das ganze noch zusätzlich mit Faktor 64 aufblähen würde.

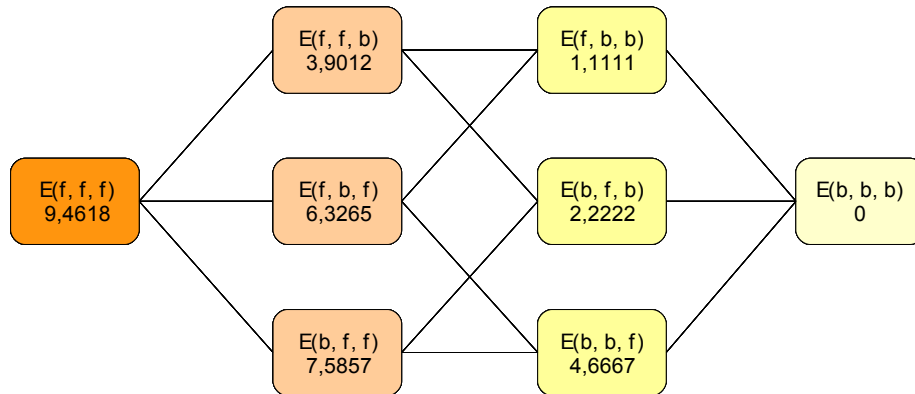


Abbildung 1: Erwartungswerte und deren Abhängigkeiten beim vereinfachten Spiel

Die Bezeichnungen setzen sich aus b für belegt und f für frei sowie der Stelle der Eintragung zusammen. Hier steht die erste Stelle im Tupel für „1er“, die zweite für „2er“ und die dritte für „Chance“.

### 3.3 Auswählen und Zurücklegen

Interessant wird Kniffel durch die Komponente „Können“. Betrachtet man ein Beispiel aus dem vereinfachten Spiel (Kapitel 4):

Gegeben sei ein Blatt, bei dem nur noch 1er und 2er als freie Felder zur Verfügung stehen (Chance ist bereits belegt). Der letzte Wurf offenbart  $\square\square$ . Der Mensch hat hier die Wahl zwischen einem Eintrag in die Felder 1er oder 2er. Unter Berücksichtigung der Resterwartungswerte ergeben sich für einen Eintrag

in 1er:  $1,0000 + E(b, f, b) = 1,0000 + 2,2222 = 3,2222$

in 2er:  $2,0000 + E(f, b, b) = 2,0000 + 1,1111 = 3,1111$

in Chance: nicht möglich

Es gibt aber auch eine Auswahl des Teilwurfs, nämlich dann, wenn noch gewürfelt werden darf. Durch das Festsetzen eines Teilwurf mit nochmaligem Würfeln der verbleibenden Würfel kann ein Spieler auch hier sein Können unter Beweis stellen und richtig handeln. Um das Optimum herauszufinden, gilt es die einzelnen möglichen Teilwürfe nacheinander durchzugehen, den Besten zu suchen und

auszuführen.

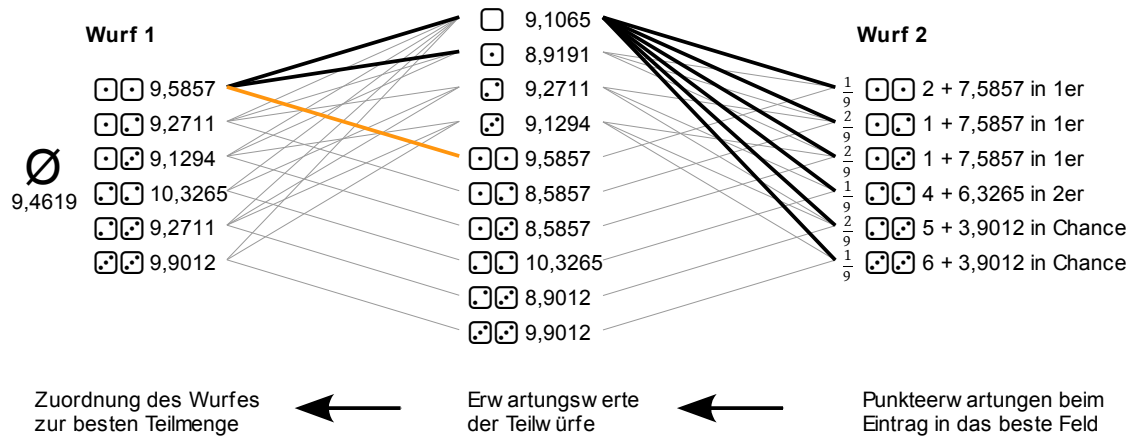


Abbildung 2: Schema bei einmaligem Zurücklegen

Diese Übersicht geht vom leeren Blatt aus. Nun kann von 2. Wurf, nachdem eingetragen werden muss, rückwärts bis zum Erwartungswert zurückgerechnet werden:

Zunächst müssen die möglichen 6 Würfe bei Wurf 2 einzeln auf ihre Punkteerwartung wie oben beschrieben untersucht und je einer Punkteerwartung für das beste Feld zugeordnet werden.

Im nächsten Schritt erhält jeder mögliche Teilwurf einen Erwartungswert. Dieser errechnet sich aus den Punkten der möglichen resultierenden Würfe gewichtet mit ihrer Auftretswahrscheinlichkeit.

Als Beispiel dient hier „kein Würfel wird behalten“ ( $\emptyset$ ):

$$9,5857 \cdot \frac{1}{9} + 8,5857 \cdot \frac{2}{9} + 8,5857 \cdot \frac{2}{9} + 10,3265 \cdot \frac{1}{9} + 8,9012 \cdot \frac{2}{9} + 9,9012 \cdot \frac{1}{9} = 9,1065$$

Die anderen Teilwürfe Errechnen sich analog.

In einem dritten Schritt werden den möglichen Würfeln aus Wurf 1 durch Vergleich je der beste Teilmenge zugeordnet.

Im Fall  $\emptyset\emptyset$  sind die möglichen Teilwürfe  $\emptyset$ ,  $\emptyset$  und  $\emptyset\emptyset$ , wobei  $\emptyset\emptyset$  den höchsten Erwartungswert hat und somit die beste Wahl hier ist. Analog ergeben sich auch hier die anderen Würfe.

Zur Berechnung des Erwartungswertes für die aktuelle Situation  $E(f, f, f)$  werden die Erwartungswerte für Wurf 1 gewichtet mit ihrer Eintrittswahrscheinlichkeit summiert.

$$9,5857 \cdot \frac{1}{9} + 9,2711 \cdot \frac{2}{9} + 9,1294 \cdot \frac{2}{9} + 10,3265 \cdot \frac{1}{9} + 9,2711 \cdot \frac{2}{9} + 9,9012 \cdot \frac{1}{9} = 9,4619$$

## 4 Das vereinfachte Spiel

Das Kniffelspiel ist zu komplex, als dass es in seiner Gesamtheit händisch durchgerechnet werden kann. Durch die starke Vereinfachung des Spiels aus Kapitel 2.2 kann die Vorgehensweise per Hand aufgezeigt werden. Der Computer geht später beim klassischen Spiel nach dem gleichen Muster vor. Der einzige Unterschied besteht darin, dass er eine wesentlich größere Anzahl an Werten berechnet und vergleicht. Um die Überschaubarkeit der Rechnung zu gewährleisten wird mit nur 4 Nachkommastellen gerechnet.

Durch die Vereinfachung können nur noch folgende Würfe erreicht werden:

Wurf						
Eintrittswahrscheinlichkeit	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Des Weiteren ergeben sich folgende Teilwürfe:

Wurf						
Teilwürfe	  	   	   	  	 	

Die Vorgehensweise je Situation lässt sich mit folgender Übersicht darstellen:

Wiederhole für jeden möglichen Wurf <i>cast</i>					
	Wiederhole für jede freie Zeile <i>row</i>				
		Berechnung der Summe aus den Punkten bei Eintragung des Wurfes <i>cast</i> in die Zeile <i>row</i> und der Resterwartung der dadurch entstehenden Situation			
	Eintrag der besten Zeile in unsere Tabelle				
Wiederhole für jedes Zurücklegen					
	Wiederhole für jeden möglichen Wurf <i>cast</i>				
		Wiederhole für jeden möglichen Teilwurf <i>subset</i>			
			Wiederhole für jede mögliche Vervollständigung <i>possible_cast</i>		
				Berechnung des Produktes aus dem aktuellen Erwartungswert des Wurfes (siehe Tabelle) und seiner Auftrittswahrscheinlichkeit	
			Ermittlung des Erwartungswertes des Teilwurfes als Addition der vorher berechneten Produkte		
		Eintrag des besten Teilwurfes in eine neue Tabelle			
	Ersetzen der alten Tabelle durch die soeben neu berechnete				
Berechnung der Resterwartung der Situation als Summe der Erwartungswerte der einzelnen Würfe (aus der aktuellen Tabelle) gewichtet mit ihrer Auftrittswahrscheinlichkeit					

Abbildung 3: Schablone für die Berechnung der Resterwartung

## 4.1 Ein freies Feld

Jedem der sechs möglichen Würfe ist der auf das gesamte Spiel gesehen maximale Punkteerwartungswert zuzuweisen. Dazu wird der Wurf fiktiv in jedes freie Feld eingesetzt und der Wert, den er für diesen Eintrag bekommen würde, zum Erwartungswert für die daraus entstandene Spielsituation addiert. Ein Vergleich bringt den höchstmöglichen Wert, der dem Wurf zuzuordnen ist.

### Fall (f, b, b)

Für  $\square\square$  ergeben sich folgende Eintragungsmöglichkeiten:

(f, b, b;  $\square\square$ ) in 1er:  $2,0000 + E(b, b, b) = 2,0000 + 0,0000 = 2,0000$

(f, b, b;  $\square\square$ ) in 2er: nicht möglich

(f, b, b;  $\square\square$ ) in Chance: nicht möglich

Da hier nur der Eintrag in das 1er-Feld möglich ist, ergibt sich für  $\square\square$  der höchstmögliche Wert 2,0000.

Durch Fortführen dieses Vorgehens erhält man für die sechs möglichen Würfe jeweils die Punkterwartungen beim Eintrag in das beste Feld:

$$P(f, b, b; \square\square) = 2,0000 \text{ in 1er}$$

$$P(f, b, b; \square\square) = 1,0000 \text{ in 1er}$$

$$P(f, b, b; \square\square) = 1,0000 \text{ in 1er}$$

$$P(f, b, b; \square\square) = 0,0000 \text{ in 1er}$$

$$P(f, b, b; \square\square) = 0,0000 \text{ in 1er}$$

$$P(f, b, b; \square\square) = 0,0000 \text{ in 1er}$$

Für die Berechnung ist jeweils nur der Wert notwendig, das Eintragungsfeld ist vernachlässigbar, wird aber hier zur besseren Nachvollziehbarkeit mit angeführt.

Nun gehen wir einen Wurf zurück und betrachten alle Teilmengen nacheinander und ordnen jeder einen Erwartungswert zu. Dieser errechnet sich als Mittelwert aus den Punkten der erreichbaren Würfe gewichtet mit ihrer Eintrittswahrscheinlichkeit.

Kein Würfel wird behalten ( $\square$ ):

$$\begin{aligned} T(f, b, b; \square) &= \square\square \frac{1}{9} + \square\square \frac{2}{9} + \square\square \frac{2}{9} + \square\square \frac{1}{9} + \square\square \frac{2}{9} + \square\square \frac{1}{9} \\ &= 2,0000 \cdot \frac{1}{9} + 1,0000 \cdot \frac{2}{9} + 1,0000 \cdot \frac{2}{9} + 0,0000 \cdot \frac{1}{9} + 0,0000 \cdot \frac{2}{9} + 0,0000 \cdot \frac{1}{9} = 0,6667 \end{aligned}$$

Im Fall, dass  $\square$  behalten wird, können nur die Würfe  $\square\square$ ,  $\square\square$  und  $\square\square$  erreicht werden. Daraus ergibt sich für diesen Teilwurf:

$$\begin{aligned} T(f, b, b; \square) &= \square\square \frac{1}{3} + \square\square \frac{1}{3} + \square\square \frac{1}{3} \\ &= 2,0000 \cdot \frac{1}{3} + 1,0000 \cdot \frac{1}{3} + 1,0000 \cdot \frac{1}{3} = 1,3333 \end{aligned}$$

Die anderen Werte errechnen sich auf gleiche Weise:

$$T(f, b, b; \square) = 0,6667$$

$$T(f, b, b; \square) = 1,3333$$

$$T(f, b, b; \square) = 0,3333$$

$$T(f, b, b; \square) = 0,3333$$

$$T(f, b, b; \square\square) = 2,0000$$

$$T(f, b, b; \square\square) = 1,0000$$

$$T(f, b, b; \square\square) = 1,0000$$

$$T(f, b, b; \square\square) = 0,0000$$

$$T(f, b, b; \square\square) = 0,0000$$

$$T(f, b, b; \square\square) = 0,0000$$

Für den Fall, dass beide Würfel behalten werden, können die Werte aus der obigen Tabelle ausgelesen werden, da sich die Situation nicht verändern kann.

Um die beste Teilmenge je Wurf zu bestimmen, ist eine Untersuchung der möglichen Teilmengen eines Wurfs nötig. Der Wurf  $\square\square$  hat die Teilmengen  $\square$ ,  $\square$  und  $\square\square$ , von denen  $\square\square$  mit 2,0000 den höchsten Erwartungswert besitzt.

Analog ergeben sich durch einfachen Vergleich die besten Spielweise für alle Würfe:

$$B(f, b, b; \square\square) = 2,0000 \text{ bei } \square\square$$

$$B(f, b, b; \square\square) = 1,3333 \text{ bei } \square$$

$$B(f, b, b; \square\square) = 1,3333 \text{ bei } \square$$

$$B(f, b, b; \square\square) = 0,6667 \text{ bei } \square$$

$$B(f, b, b; \square\square) = 0,6667 \text{ bei } \square$$

$$B(f, b, b; \square\square) = 0,6667 \text{ bei } \square$$

Auch hier wird für die Berechnung jeweils nur der Wert benötigt, der beste Teilwurf, der behalten wird, ist vernachlässigbar wird aber hier zu besseren Nachvollziehbarkeit mit angeführt.

Der Erwartungswert für diese Situation (f, b, b) vor dem 1. Wurf kann durch einfache Wahrscheinlichkeitsbetrachtung ermittelt werden. Wird  $\square\square$  gewürfelt, behält man  $\square\square$  und erhält im Mittel 2,0000 Punkte. Durch die jeweilige Gewichtung mit der Eintrittswahrscheinlichkeit ist der Erwartungswert für diese Situation errechenbar. Dieser Wert wird für die Auswahltabelle der Situationen mit 2 freien Feldern benötigt.

$$\begin{aligned} E(f, b, b) &= \square\square \cdot \frac{1}{9} + \square\square \cdot \frac{2}{9} + \square\square \cdot \frac{2}{9} + \square\square \cdot \frac{1}{9} + \square\square \cdot \frac{2}{9} + \square\square \cdot \frac{1}{9} \\ &= 2,0000 \cdot \frac{1}{9} + 1,3333 \cdot \frac{2}{9} + 1,3333 \cdot \frac{2}{9} + 0,6667 \cdot \frac{1}{9} + 0,6667 \cdot \frac{2}{9} + 0,6667 \cdot \frac{1}{9} \\ &= \frac{10,0000}{9} = 1,1111 \end{aligned}$$

Die Resterwartungswerte für anderen beiden Situationen werden auf gleiche Weise berechnet. Somit ergeben sich:

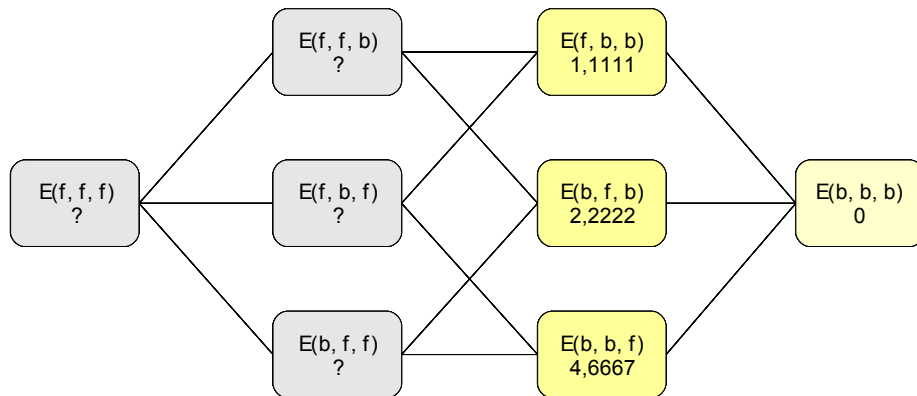


Abbildung 4: Erwartungswerte nach Berechnung aller Fälle mit einem freien Feld

## 4.2 Zwei freie Felder

Da für die maximalen Punkte die nachfolgende Situation berücksichtigt werden muss, können zwei leere Felder erst berechnet werden, wenn die möglichen nachfolgenden Situationen mit einem leeren Feld errechnet wurden.

### Fall (f, f, b)

Da es hier eine Wahl gibt, wird durch Vergleich der höchste Gesamtwert bestimmt und dem Wurf zugeordnet. Für  $\square\square$  ergeben sich folgende Eintragsmöglichkeiten:

$$(f, f, b; \square\square) \text{ in 1er: } 2,0000 + E(b, f, b) = 2,0000 + 2,2222 = 4,2222$$

$$(f, f, b; \square\square) \text{ in 2er: } 0,0000 + E(f, b, b) = 0,0000 + 1,1111 = 1,1111$$

(f, f, b;  $\square\square$ ) in Chance: nicht möglich

Somit ergibt sich als die Punkteerwartungen beim Eintrag in das beste Feld für die alle Würfe:

$$P(f, f, b; \square\square) = 4,2222 \text{ in 1er}$$

$$P(f, f, b; \square\square) = 3,2222 \text{ in 1er}$$

$$P(f, f, b; \square\square) = 3,2222 \text{ in 1er}$$

$$P(f, f, b; \square\square) = 5,1111 \text{ in 2er}$$

$$P(f, f, b; \square\square) = 3,1111 \text{ in 2er}$$

$$P(f, f, b; \square\square) = 2,2222 \text{ in 1er}$$

Die Teilwürfe werden auf gleiche Weise wie mit einem freien Feld berechnet:

$$T(f, f, b; \square) = 3,4074$$

$$T(f, f, b; \ominus) = 3,5555$$

$$T(f, f, b; \boxminus) = 3,8148$$

$$T(f, f, b; \boxplus) = 2,8518$$

$$T(f, f, b; \square\square) = 4,2222$$

$$T(f, f, b; \ominus\ominus) = 3,2222$$

$$T(f, f, b; \boxminus\boxminus) = 3,2222$$

$$T(f, f, b; \boxplus\boxplus) = 5,1111$$

$$T(f, f, b; \boxplus\boxminus) = 3,1111$$

$$T(f, f, b; \boxminus\boxplus) = 2,2222$$

Die beste Spielweise für die einzelnen Würfe ergibt sich wieder durch einfachen Vergleich:

$$B(f, f, b; \square\square) = 4,2222 \text{ bei } \square\square$$

$$B(f, f, b; \ominus\ominus) = 3,8148 \text{ bei } \ominus$$

$$B(f, f, b; \boxminus\boxminus) = 3,5555 \text{ bei } \boxminus$$

$$B(f, f, b; \boxplus\boxplus) = 5,1111 \text{ bei } \boxplus\boxplus$$

$$B(f, f, b; \boxplus\boxminus) = 3,8148 \text{ bei } \boxminus$$

$$B(f, f, b; \boxminus\boxplus) = 3,4074 \text{ bei } \square$$

Der Erwartungswert wird hier auf die gleiche Weise berechnet wie im vorherigen Fall mit einem freien Feld und ergibt sich als:

$$E(f, f, b) = 3,9012$$



Die Resterwartungswerte für anderen beiden Situationen werden auf gleiche Weise berechnet. Somit ergeben sich:

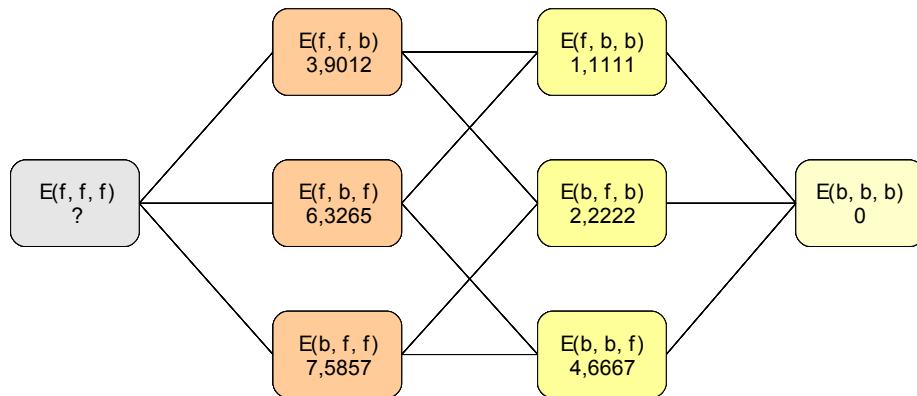


Abbildung 5: Erwartungswerte nach Berechnung aller Fälle mit zwei freien Feldern

### 4.3 Drei freie Felder

Im großen Finale kann nun die Situation, bei der alle drei Felder frei sind, aufgrund des Vorwissens berechnet werden. Der Vorgang verhält sich vollkommen analog zu den bisher gezeigten Rechnungen, weshalb hier lediglich die Zwischenergebnisse genannt werden.

$$P(f, f, f; \square\square) = 9,5857 \text{ in 1er}$$

$$P(f, f, f; \square\square) = 8,5857 \text{ in 1er}$$

$$P(f, f, f; \square\square) = 8,5857 \text{ in 1er}$$

$$P(f, f, f; \square\square) = 10,3265 \text{ in 2er}$$

$$P(f, f, f; \square\square) = 8,9012 \text{ in Chance}$$

$$P(f, f, f; \square\square) = 9,9012 \text{ in Chance}$$

$$T(f, f, b; \square) = 9,1065$$

$$T(f, f, b; \square) = 8,9190$$

$$T(f, f, b; \square) = 9,2711$$

$$T(f, f, b; \square) = 9,1294$$

$$T(f, f, b; \square\square) = 9,5857$$

$$T(f, f, b; \square\square) = 8,5857$$

$$T(f, f, b; \square\square) = 8,5857$$

$$T(f, f, b; \square\square) = 10,3265$$

$$T(f, f, b; \square\square) = 8,9012$$

$$T(f, f, b; \text{♣♣}) = 9,9012$$

$$B(f, f, b; \text{♣♣}) = 9,5857 \text{ bei } \text{♣♣}$$

$$B(f, f, b; \text{♣♣}) = 9,2711 \text{ bei } \text{♣}$$

$$B(f, f, b; \text{♣♣}) = 9,1294 \text{ bei } \text{♣}$$

$$B(f, f, b; \text{♣♣}) = 10,3265 \text{ bei } \text{♣♣}$$

$$B(f, f, b; \text{♣♣}) = 9,2711 \text{ bei } \text{♣}$$

$$B(f, f, b; \text{♣♣}) = 9,9012 \text{ bei } \text{♣♣}$$

Der Erwartungswert für das leere Blatt  $E(f, f, f)$  ist der Erwartungswert bei optimaler Spielweise für das gesamte Spiel.

$$E(f, f, f) = 9,4618$$

Das auf die vereinfachte Situation umgeschriebene Computerprogramm liefert den Wert 9,4618706498, der hier bis auf die letzte Kommastelle erreicht wird. Eine Berechnung per Hand ist folglich möglich und richtig.

## 5 Implementierung in Python

### 5.1 Einleitung

Bei den Gedanken und ersten Zeilen Code zur Facharbeit von Ralf Käck wurde uns schnell klar, dass wir viele Teile sehr allgemein programmieren können. Wir gingen dazu über, den Code zur Berechnung der Resterwartungswerte von jeglicher Kenntnis über die Spielregeln, ja sogar über Anzahl und Art der verwendeten Würfel, zu befreien und diese speziellen Dinge auszulagern. So entstand die Aufteilung in zwei Module: `core` und `modes`. In `core` befindet sich der variationsunabhängige Code zur Berechnung der Resterwartungen, in `modes` wird diese Codebasis um die speziellen Regelkonstrukte und Punkteschemata erweitert.

Zur Verbesserung der Performance kam regelmäßig der Python Profiler zum Einsatz. Mit seiner Hilfe war es ein leichtes, übermäßige Zeitfresser ausfindig zu machen und durch schnellere Code-Konstrukte zu ersetzen. Letztlich brachte die Verwendung der Psycho-Bibliothek<sup>7</sup> einen enormen Geschwindigkeitszuwachs – auf unseren Rechnern konnten wir dadurch die Ausführungszeit auf etwa ein Drittel reduzieren.

### 5.2 Überblick

Der Quellcode ist auf zehn Dateien in zwei Ordnern aufgeteilt:

<b>core/</b>	
<code>common.py</code>	Allgemeine Funktionen, die an vielen Stellen genutzt werden.
<code>worker.py</code>	Weitgehend abstrahierter Code zur Berechnung von Resterwartungswerten in Kniffel-ähnlichen Spielsystemen.
<b>modes/</b>	
<code>cheat.py</code>	Implementierung des Standard-Spiels mit gezinkten Würfeln. Dieser Code soll lediglich die Machbarkeit zeigen, wir verzichten daher auf detaillierte Kommentare und tiefgreifende Funktionalität.
<code>multiple_yahtzee.py</code>	Eine gern gespielte Regelvariation, bei der man bei erneutem Würfeln eines Kniffels diesen in ein beliebiges Feld für 100 Punkte eintragen kann.
<code>simple.py</code>	Das einfache Spiel aus Kapitel 4.
<code>standard.py</code>	Implementierung des Standard-Regelwerks aus Kapitel 2.1.

---

<sup>7</sup> <http://psyco.sourceforge.net/>

/	
best_choice.py	Gibt die beste Entscheidung in der gegebenen Spielsituation aus. Beispiel: <code>./best_choice.py standard 524224 1,1,2,3,5 0</code>
calc_expvals.py	Berechnet alle Resterwartungswerte der angegebenen Spielvariante und speichert diese in <code>modes/MODUS.expvals</code> .
query_expval.py	Gibt den gewünschten Resterwartungswert aus.
tests.py	Führt mehrere Tests aus, um die Funktionalität des Programms zu überprüfen. Dieses Script sollte nach Änderungen am Quellcode immer ausgeführt werden, um Fehler frühzeitig zu erkennen.

Zur Benutzung der Skripte im Wurzelverzeichnis lesen Sie bitte die Datei `README.txt`.

### 5.3 Datenstrukturen

Da wir sehr oft Werte in Abhängigkeit der Spielsituation berechnen, brauchen wir einen Weg, diese eindeutig speichern zu können. Aus diesem Grund legen wir fest, dass die Reihen des Spielblocks mit 2er-Potenzen durchnummeriert werden müssen. Eine Situation kann damit eindeutig durch Addition ihrer freien Reihen definiert werden. Deutlich wird dieser Sachverhalt, wenn man sich den Vorgang im Binärsystem vorstellt. Durch die Einschränkung der Reihen-Nummern auf 2er-Potenzen ist bei diesen Zahlen jeweils nur ein Bit belegt. Durch Addition mit den anderen Reihen-Konstanten bleibt dieses Bit erhalten, da alle anderen Reihen an dieser Stelle ein 0-Bit haben. Beim Standardmodus beginnen wir mit der Nummerierung bei  $2^6$ . Die ersten 6 Bit ( $2^0$  bis  $2^5$ ) sind hier für den Bonus reserviert.

Des Weiteren müssen wir Würfe und Teilwürfe eindeutig speichern können. Hierzu legen wir fest, dass ein Wurf ein aufsteigend sortiertes Tupel seiner Augenzahlen ist. Diese können in Python sogar als Schlüssel für assoziative Arrays verwendet werden.

## 5.4 Zusammenspiel von Worker und Spielmodus

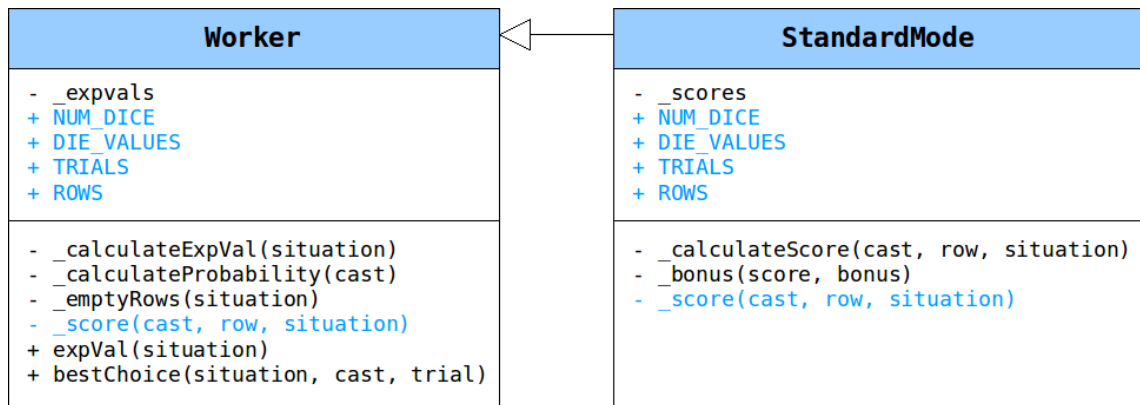


Abbildung 6: Vereinfachtes Klassendiagramm

Abbildung 6 verdeutlicht das Zusammenspiel der abstrakten Worker-Klasse mit der speziellen Regeldefinition im Spielmodus. Die blau markierten Attribute und Methoden im Worker müssen zwingend vom Spielmodus implementiert werden.

Die Worker-Klasse ist das eigentliche Arbeitstier, wenngleich sie alleine nichts berechnen kann. Ihr fehlen dazu Informationen über die verwendeten Würfel, den Spielblock und die Punkte, die man für das Eintragen von Würfeln in bestimmte Zeilen bekommt. Dieses Wissen stellt der Spielmodus über die vier Attribute `NUM_DICE`, `DIE_VALUES`, `TRIALS` und `ROWS` und der Methode `_score` zur Verfügung.

Die Berechnung der Resterwartungswerte erfolgt in der Methode `_calculateExpVal`. Diese erwartet eine Spielsituation als Argument. Der Ablauf orientiert sich streng am Ablaufdiagramm in Abbildung 3 auf Seite 12. `_calculateProbability` und `_emptyRows` sind lediglich Hilfsmethoden, die zur Berechnung des Resterwartungswertes mit herangezogen werden.

Alle weiteren Attribute und Methoden, auf die Sie beim Studium der `worker.py` stoßen werden, dienen entweder der Ausgabe oder bieten erweiterte Funktionalität. Diese werden aus Gründen der Übersichtlichkeit hier nicht gesondert erläutert, da sie keinen Einfluss auf die Berechnung haben.

## 5.5 Die Spielmodi

Jede Quellcode-Datei im `modes`-Modul stellt einen eigenen Spielmodus bzw. eine eigene Regelvariante dar. Die Klassen dieses Moduls erweitern die `Worker`-Klasse um spezielle Methoden, vor allem aber überschreiben sie folgende Attribute und Methoden der `Worker`-Klasse:

ROWS	Die Zeilen des Kniffelblocks. Dieses Attribut muss ein Tupel aus 2er-Potenzen sein.
NUM_DICE	Die Anzahl der Würfel.
DIE_VALUES	Ein Tupel mit den Augenzahlen der Würfel. Es ist also auch möglich, mit ungewöhnlich beschrifteten Würfeln zu spielen.
TRIALS	Bestimmt, wie oft zurückgelegt werden darf.
_score	Diese Methode bildet Situation, Wurf und Zeile auf eine Punktzahl und die daraus resultierende Spielsituation ab. Sie muss vom Spielmodus implementiert werden, da nur hier Kenntnis über die Punktevergabe besteht.

Diese vier Attribute und die eine Methode sind das Minimum, was ein Spielmodus zur Verfügung stellen muss, damit dieser berechenbar ist. Ein schönes Beispiel hierfür ist das vereinfachte Spiel (`modes/simple.py`).

## 6 Ausblick

### 6.1 Varianten

Wie bereits angesprochen, haben wir bei der Entwicklung auf größtmögliche Flexibilität geachtet. Die Worker-Klasse selbst ist so abstrahiert, dass mit ihr unzählige Kniffel-ähnliche Spiele berechnet werden können. Hierfür finden sich im Ordner `modes` einige Beispiele. Ideen für weitere Regelvarianten wären z.B. das Spiel mit mehreren Spalten gleichzeitig oder die Einführung einer zweiten Chance. Ebenso interessant ist die Untersuchung des Spiels mit gezinkten Würfeln zur Klärung der Frage, wie man die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Seiten wählen muss, um ein optimales Ergebnis zu erhalten.

### 6.2 Graphische Oberflächen und weitere Anwendungsmöglichkeiten

Die von uns entwickelten Kommandozeilen-Tools sind bestenfalls funktionsfähig und nützlich, aber wenig hübsch anzusehen. Dennoch ist es mit unserer Vorarbeit ein leichtes, schöne bunte Oberflächen für beliebige Kniffel-Spiele zu schreiben. Denkbar wäre z.B. auch ein Kniffel-Trainer, der dem „Spieler“ bestimmte Spielsituationen vorsetzt und ihn fragt, wie er bei bestimmten Würfeln handeln würde. Seine Abweichung von der optimalen Spielweise könnte als Handicap betrachtet werden – damit wäre es sogar möglich Spielstärken von Kniffelspielern zu ermitteln.

# Literaturverzeichnis

- 1: Schmidt Spiele, Die offizielle Spielanleitung für Kniffel (siehe CD)
- 2: Felix Holderied, Über das perfekte Kniffel-Spiel, <http://www.holderied.de/kniffel/>
- 3: Felix Holderied, Schriftverkehr (siehe CD), 2007

# Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Erwartungswerte und deren Abhängigkeiten beim vereinfachten Spiel....	9
Abbildung 2: Schema bei einmaligem Zurücklegen.....	10
Abbildung 3: Schablone für die Berechnung der Resterwartung.....	12
Abbildung 4: Erwartungswerte nach Berechnung aller Fälle mit einem freien Feld.....	15
Abbildung 5: Erwartungswerte nach Berechnung aller Fälle mit zwei freien Feldern...	17
Abbildung 6: Vereinfachtes Klassendiagramm.....	21